

ALGORYTMY AUTOMATYCZNEGO TWORZENIA SIATKI ELEMENTÓW W PRAKTYCE - PUŁAPKI METODY CZĘŚĆ 2

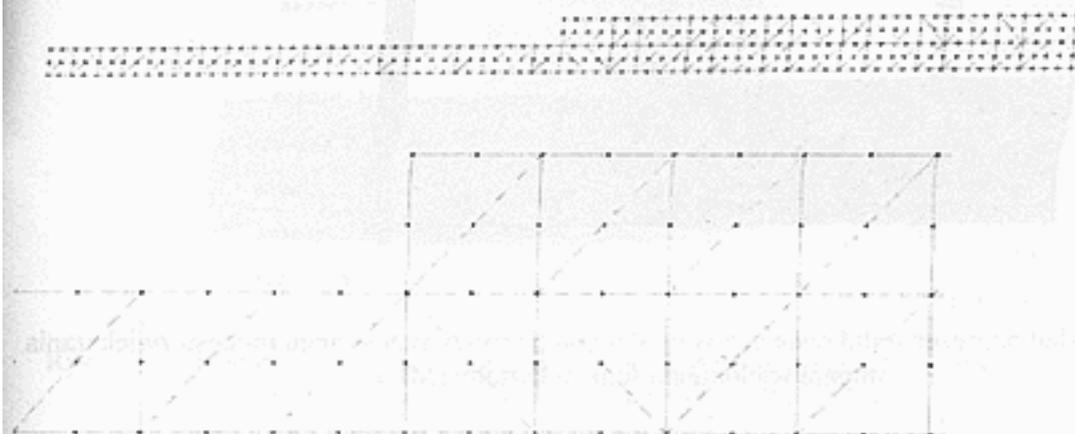
Streszczenie. W drugiej części artykułu pokazano, na podstawie wyników eksperymentów numerycznych, inną metodę poprawy dokładności obliczeń przy zastosowaniu adaptacyjnych algorytmów podziału modelu na elementy skończone. Pokazano zagrożenia bezkrytycznego stosowania ww. algorytmów.

1. WSTĘP

Kontynuując nasze rozważania musimy pójść drogą wytyczoną w pierwszej części pracy. Wiemy już, że elementy liniowe nie są najlepszym lekarstwem na poprawę dokładności obliczeń. Spróbujmy więc zastosować analizę naszego modelu opartą jednak o elementy wyższych rzędów. Do tej pory, by poprawić dokładność rozwiązania, szliśmy drogą podziału modelu na coraz mniejsze elementy (tak zwana metoda H). Jednak pamiętając o rodowodzie metody elementów skończonych, wywodzącej się z metody Ritz'a, możemy pójść jeszcze drogą komplikacji funkcji bazowych - funkcji kształtu (tak zwana metoda P). Poniżej przedstawiono krótko takie podejście.

2. PRZEDSTAWIENIE PROBLEMU

Dla kompletności porównania weźmy model z pierwszej części artykułu. Tak wybrany model podzielmy na elementy typu TRIANG, ale dla odmiany weźmy tym razem elementy 6 węzłowe, których funkcja kształtu jest opisana wielomianem drugiego stopnia. Zwiększa to ilość węzłów w modelu podstawowym, ale powinno mieć znaczący wpływ na dokładność rozwiązania. Opisywany model przedstawia poniższa ilustracja (Rys.1).



Rys.1. Model podziału na elementy skończone z zastosowaniem elementów 6-cio węzłowych

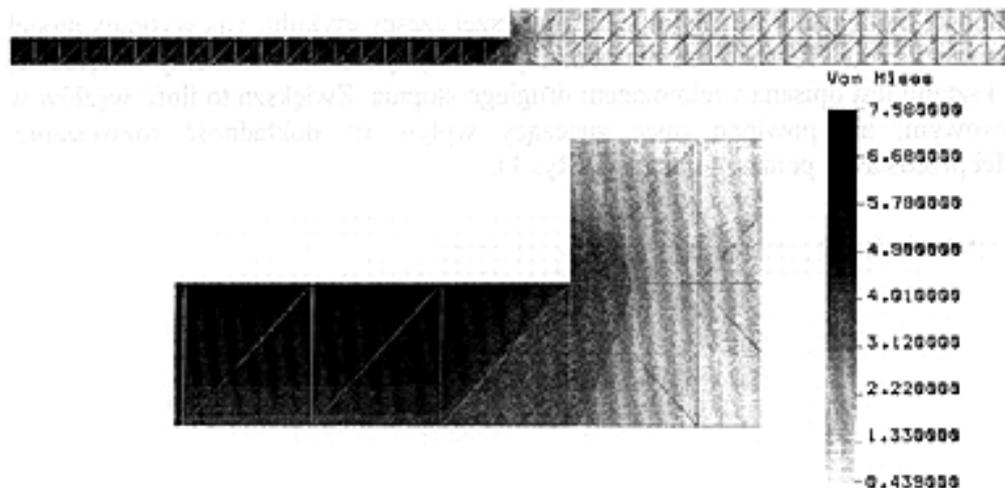
Model ten posiada 120 elementów i węzłów. Ilość stopni swobody zależy od stopnia wielomianu opisującego przemieszczenia wewnątrz elementu.

3. METODA ZWIĘKSZANIA DOKŁADNOŚCI

W prezentowanej obecnie metodzie zwiększoną dokładność obliczeń uzyskujemy zwiększając komplikację funkcji kształtu. Dotychczas funkcja była liniowa, teraz w pierwszym podejściu zakładamy, że jest opisywana wielomianem drugiego stopnia. W przypadku niewystarczającej dokładności podnosimy stopień wielomianu. Kolejne kroki iteracyjne polegają więc na podnoszeniu stopnia wielomianu opisującego funkcję kształtu elementu. Podział na elementy skończone pozostaje w modelu nienaruszony. Warto tu zwrócić uwagę, że istnieją dwie metody podnoszenia komplikacji funkcji kształtu. W pierwszej podnosimy stopień wszystkich funkcji opisujących przemieszczenia w elemencie. W drugiej zwiększamy stopień wielomianu jedynie dla tych krawędzi elementu, które tego wymagają. W przypadku małych modeli wybór metody komplikacji nie ma specjalnego znaczenia. W modelach dużych, oszczędności wynikające z mniejszej ilości wielomianów wyższego stopnia wymaganych do opisu modelu, może mieć zasadnicze znaczenie dla długotrwałości obliczeń.

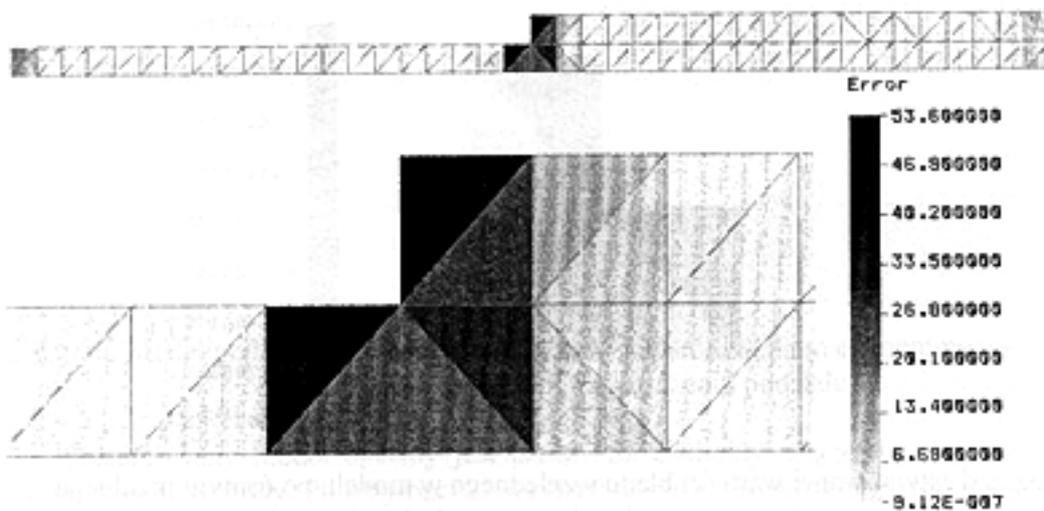
4. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Przyjrzyjmy się rozwiązaniu naszego przykładu. Dla przedstawionego powyżej modelu przeprowadziliśmy jedną pętlę iteracyjną, która doprowadziła do modelu, w którym wszystkie elementy opisywane są wielomianami trzeciego stopnia. Uzyskany rozkład naprężeń zredukowanych przedstawia rysunek (Rys. 2)



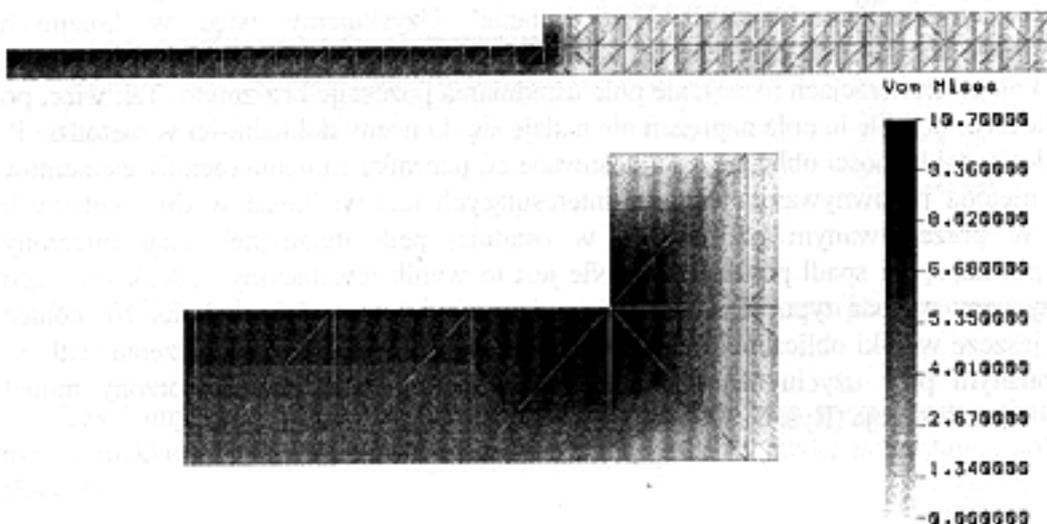
Rys. 2. Rozkład naprężeń zredukowanych w modelu po pierwszym przebiegu procesu zwiększania stopnia wielomianu funkcji kształtu (MPa)

Jak widać, podniesienie stopnia wielomianu zaowocowało dość dużym, w porównaniu do metody H, wzrostem dokładności obliczeń. Sprawdźmy teraz rozkład błędu estymowanego. Przedstawiony został na rysunku kolejnym (Rys. 3).



Rys. 3. Rozkład estymowanej wartości błędu względnego w modelu po pierwszym przebiegu procesu zwiększania stopnia wielomianu funkcji kształtu

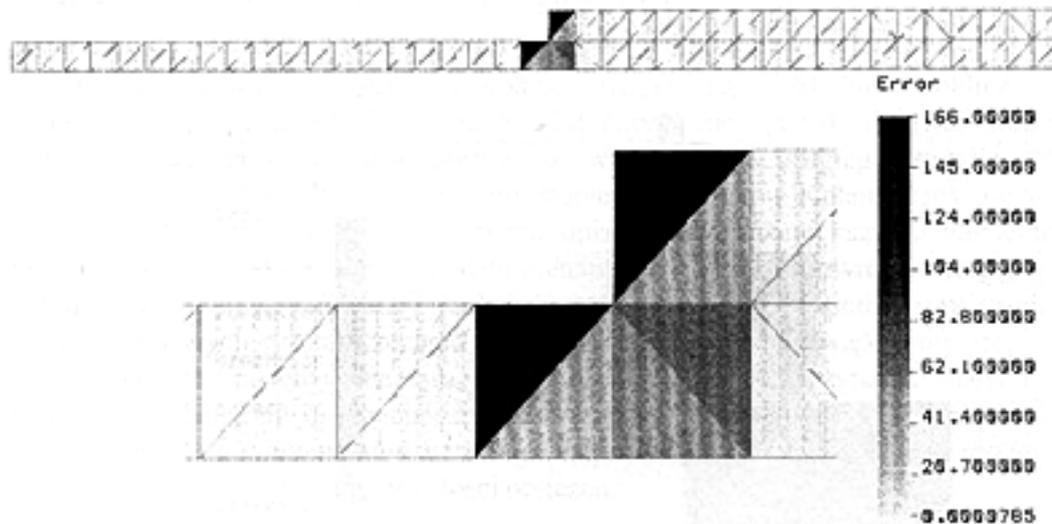
Błąd jest jednak nadal duży! Poprowadźmy więc konsekwentnie dalej proces iteracyjny. Dla uproszczenia pokażemy od razu ostateczną wersję obliczeń, w której we wszystkich elementach funkcje kształtu opisane są wielomianem 10 stopnia. Prezentację wyników, tak jak dotychczas, rozpoczniemy od prezentacji mapki naprężeń zredukowanych (Rys. 4)



Rys. 4. Rozkład naprężeń zredukowanych w modelu po ósmym przebiegu procesu zwiększania stopnia wielomianu funkcji kształtu (MPa)

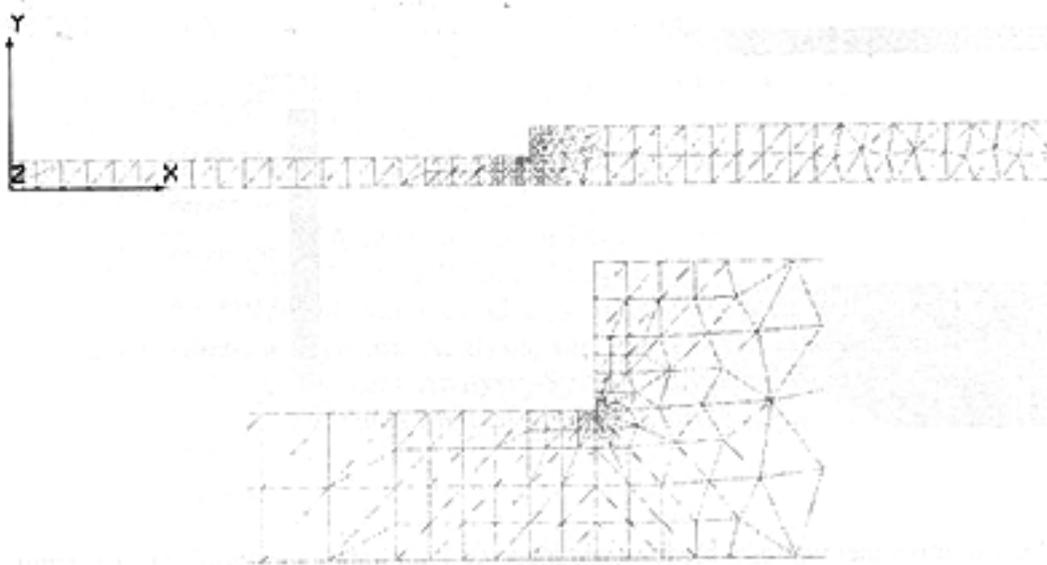
Rozkład naprężeń zredukowanych, zilustrowany powyżej znacząco odbiega od dotąd prezentowanych. Czy więc teraz wreszcie uzyskaliśmy dostateczną dokładność? Spróbujmy

odpowiedzieć na to pytanie poprzez sprawdzenie rozkładu błędu estymowanego. Pożądaną charakterystykę obrazuje kolejny rysunek (Rys. 5).



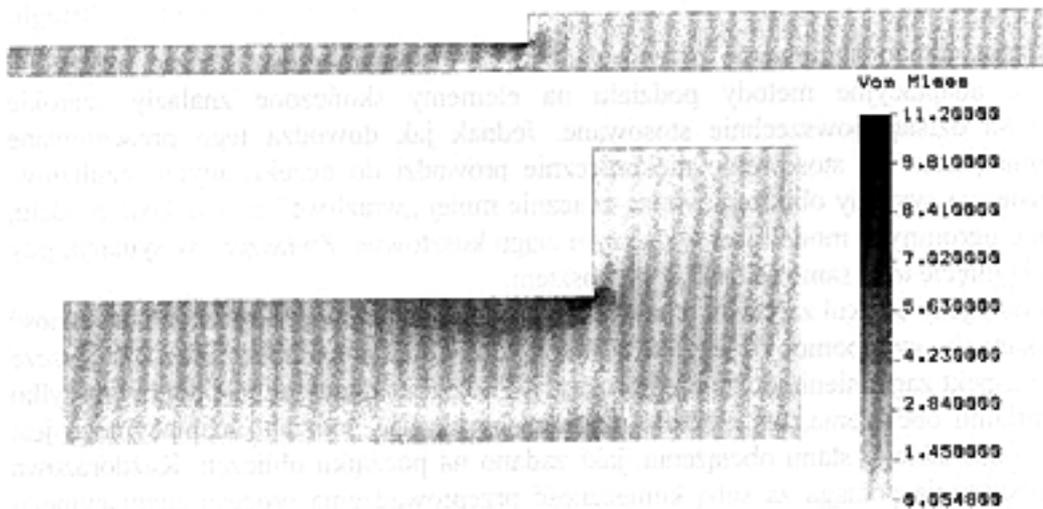
Rys. 5. Rozkład estymowanej wartości błędu względnego w modelu po ósmym przebiegu procesu zwiększania stopnia wielomianu funkcji kształtu

kolejna niespodzianka. Błąd względny osiągnął nie notowaną w naszych dotychczasowych eksperymentach wielkość. Jaka jest tego przyczyna? Aby odpowiedzieć na to pytanie zastanówmy się na chwilę nad sposobem oceny wielkości błędu. Zależy on od różnicy pomiędzy wartością średnią w elemencie a ekstremalnymi wartościami naprężenia estymowanego przy użyciu tej samej funkcji, która odpowiada za aproksymację przemieszczeń wewnątrz elementu. Tymczasem średnia wartość naprężenia w elemencie zależy nie tylko od wartości naprężeń jako takich, ale i od wielkości obszaru uśredniania - wielkości elementu skończonego, a ten w prezentowanej metodzie przecież nie ulega zmianie! Uzyskujemy więc w kolejnych przybliżeniach pole naprężeń z coraz lepszą dokładnością (zbieżność jest „od dołu”, czyli naprężenia w kolejnych iteracjach rosną), ale pole uśredniania pozostaje bez zmian. Tak więc, po prostu, metoda estymacji błędu pola naprężeń nie nadaje się do oceny dokładności w metodzie P. Metodą określenia dokładności obliczeń jest stosowana od początku istnienia metody elementów skończonych metoda porównywania wartości interesujących nas wielkości w dwu kolejnych przebiegach. W prezentowanym przykładzie, w ostatniej pętli iteracyjnej, błąd mierzony odstępstwem pól naprężeń spadł poniżej 20%. Nie jest to wynik rewelacyjny, jednak znacząco lepszy niż uzyskany metodą typu H, prezentowaną w pierwszej części artykułu. Na koniec przedstawmy jeszcze wyniki obliczeń, które uzyskano na drodze ręcznego zagęszczenia siatki w modelu wykonanym przy użyciu elementów TRIANG stopnia drugiego. Utworzony model przedstawia kolejna ilustracja (Rys. 6).



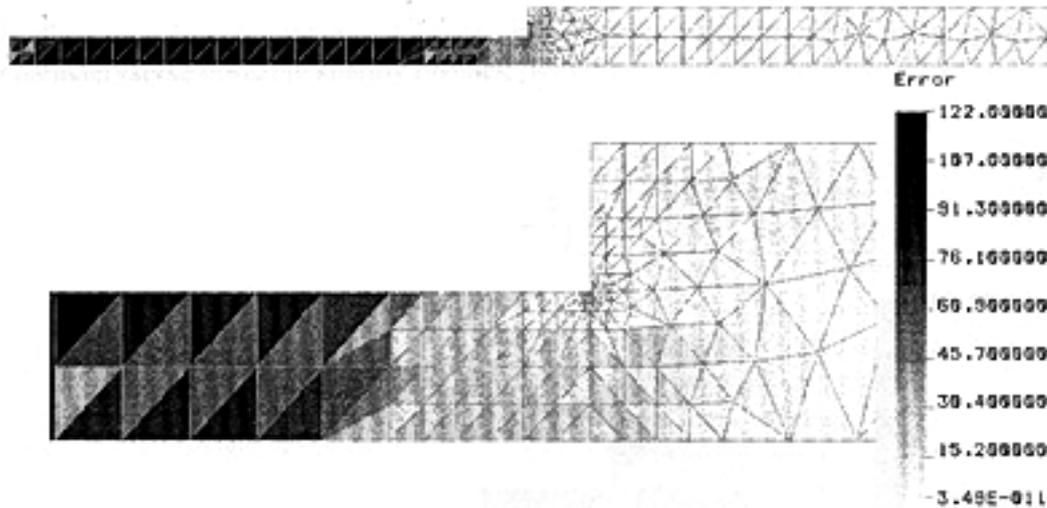
Rys. 6. Model podziału na elementy skończone z zastosowaniem elementów 6-cio węzłowych przy „ręcznym” zagęszczeniu podziału

Prezentowany model opisany jest przez 352 elementy rozpięte na 825 węzłach. Posiada 11016 stopni swobody. Po przyłożeniu obciążeń uzyskano rozkład naprężeń redukowanych, dany na rysunku (Rys. 7)



Rys. 7. Rozkład naprężeń redukowanych w modelu po „ręcznym” zagęszczeniu podziału na elementy skończone (MPa)

Uzyskamy pełny obraz uzyskanych wyników uzupełniając prezentowane charakterystyki o mapkę rozkładu błęd estymowanego. Opisywaną charakterystykę przedstawia kolejny rysunek (Rys. 8).



Rys. 8. Rozkład estymowanej wartości błędu względnego w modelu po „ręcznym” zagęszczeniu podziału na elementy skończone

5. WNIOSKI

Przyszedł czas na podsumowanie przeprowadzonych eksperymentów. Zacząć należy od stwierdzenia, że adaptacyjne metody podziału na elementy skończone znalazły szerokie zastosowanie i są dzisiaj powszechnie stosowane. Jednak jak dowodzą tego prezentowane przykłady automatyczne ich stosowanie niekoniecznie prowadzi do oczekiwanych rezultatów. Wprawdzie dzisiejsze systemy obliczeniowe są znacznie mniej „wrażliwe” na wielkość modelu, jednak tworzenie ogromnych modeli jest w dalszym ciągu kosztowne. Zwłaszcza w sytuacji, gdy jest możliwe osiągnięcie tego samego celu tańszym kosztem.

Na pewno niniejszy artykuł zachwiał wiarą w dostateczną, do celów praktycznych, zbieżność wyników uzyskanych przy pomocy elementów liniowych. Tutaj powinniśmy zwrócić jeszcze uwagę na jeden aspekt zagadnienia dotąd nie poruszany. Podział adaptacyjny jest poprawny tylko dla jednego wariantu obciążenia, tzn. podział uzyskany na drodze podziału adaptacyjnego jest adekwatny tylko dla takiego stanu obciążenia, jaki zadano na początku obliczeń. Każdorazowa zmiana stanu obciążenia pociąga za sobą konieczność przeprowadzenia procesu adaptacyjnego podziału od nowa. Przy skomplikowanych modelach stanu obciążenia stawia to problem wielkości, uzyskanego w wyniku adaptacyjnego podziału modelu, na pierwszym miejscu. W takiej sytuacji bezkrytyczne stosowanie algorytmów automatycznych może w wielu wypadkach doprowadzić nawet do wyczerpania możliwości obliczeniowych systemu.

LITERATURA

1. Rusiński E.: Metoda elementów skończonych. WKŁ, Warszawa 1994.
2. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.: A Simple Error Estimator And Adaptive Procedure For Practical Engineering Analysis. Numerical Methods in Engineering Vol.24 no.2, 1987, str.337-358.
3. Cosmos/M, Basic FEA System. LinearStatic, Natural Frequency and Buckling Analysis, ver. 1.70 vol.3, Santa Monica 1993, California.
4. Cosmos/M, Advanced Modules User Guide. Advanced Dynamics, Heat Transfer and Nonlinear Static & Dynamic Analysis, ver. 1.70 vol.4, Santa Monica 1993, California.
5. Cosmos/M, Finite Element Analysis System Advanced Seminar. Structural Research & Analysis Corporation, Santa Monica 1993, California.

AUTONOMOUS DIVISION OF A MODEL INTO FINITE ELEMENTS. TRAPS OF THE METHOD Part 2.

Abstract

Based on the results of the numerical experiments, the second part of the paper shows another method of improving the accuracy of the calculations by employing adaptable algorithms for the division of the model into final elements. Threats of uncritical attitude to the use of the algorithms have pointed out.