

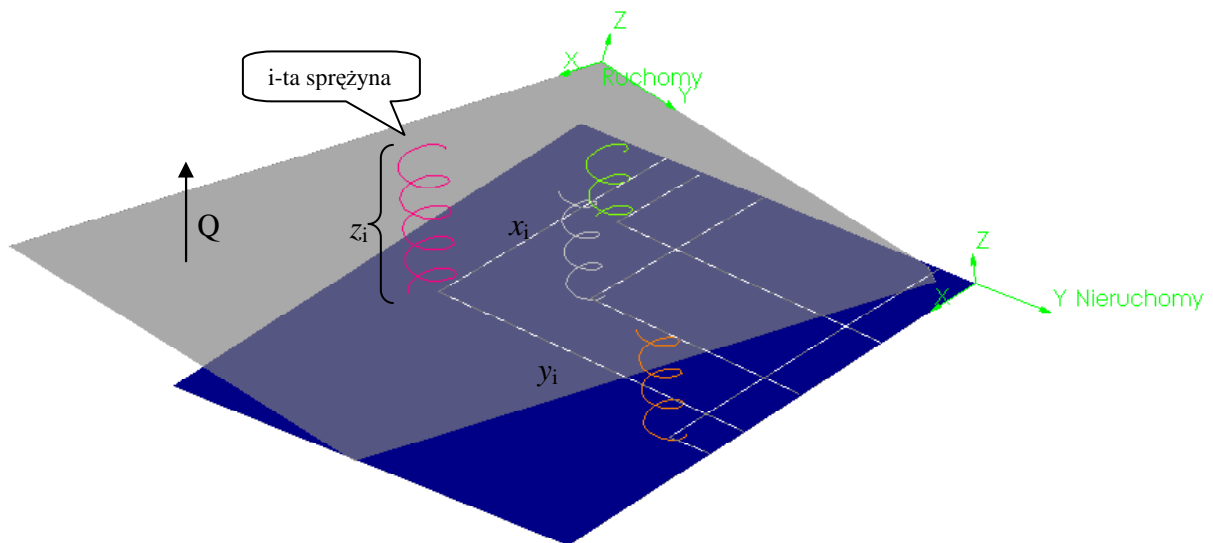
Płyta podparta sprężyscie w n- punktach

Streszczenie

Opracowanie zajmuje się znalezieniem położenia równowagi dla nieskończenie sztywnej płyty obciążonej siłami skupionymi, podpartej w n- punktach liniowo sprężyscie. Oprócz tego zawiera dyskusję uzyskanych wyników dla przypadku gdy płyta podparta jest jednopunktowo. Jako podsumowanie przedstawiono przykład zastosowania uzyskanych wyników do obliczenia położenia równowagi dla podpartego na 12 kołach żurawia gąsienicowego jak również dla tego samego pojazdu z dodatkowym podparciem w postaci krawędzi lemiesza.

Założenia

Dla dalszych rozważań zacznijmy od określenia wstępnych założeń. Niech nieskończenie sztywna płyta podparta jest w n- punktach liniowymi sprężynami. Dalej niech punkty podparcia leżą na płaszczyźnie XY (patrz rys. 1). Układ współrzędnych nieruchomy będzie wtedy związany z podłożem, ruchomy związany zaś z nieskończenie sztywną płytą.



Rys. 1

Niech sztywność każdego punktu jest dowolna, a bez obciążenia płaszczyzny pokrywają się. Płyta dla skupienia uwagi obciążona jest jedną siłą skupioną. Zakłada się, że obroty (kąty pochylenia) płyty są niewielkie, tak aby:

$$\sin \alpha \cong \operatorname{tg} \alpha \cong \alpha$$

Przyjmujemy też, że płyta może przemieszczać się tylko w pionie.

Oznaczenia

Wprowadźmy następujące oznaczenia, niech

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix}_{n \times 1}$$

[1] ,

to macierz rozmieszczenia punktów mocowania sprężyn – x_i współrzędna x punktu mocowania i - tej sprężyny. Zaś

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} y \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix}_{n \times 1}$$

[2] ,

macierz rozmieszczenia punktów mocowania sprężyn – y_i współrzędna y punktu mocowania i - tej sprężyny. Z kolei

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{Bmatrix}_{n \times 1}$$

[3] ,

to macierz deformacji sprężyn na płycie – z_i przemieszczenie z punktu mocowania i - tej sprężyny.

Dalej niech

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix}_{n \times 1}$$

[4] ,

to macierz sił sprężystości – F_i to siła z jaką i -ta sprężyna działa na płytę.

Przyjmijmy dalej, że

Q – to siła skupiona , którą obciążamy płytę, wtedy

$$\{x_c\} = \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{Bmatrix}_{3 \times 1}$$

[5] ,

wyrażać będzie współrzędne przyłożenia obciążenia Q w przyjętym układzie współrzędnych.

Zdefiniujmy jeszcze macierz sztywności układu

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

[6] ,

wprowadźmy jeszcze dla przejrzystości równań macierz

$$[X] = \begin{bmatrix} \{x\}^T \\ \{y\}^T \\ \{1\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \\ \{1, 1, \dots, 1\}_{1 \times n} \end{bmatrix}_{3 \times n}$$

[7] ,

Analiza problemu sztywnej płyty- wariant ogólny

Zgodnie z założeniem płyta podparta jest sprężynami liniowymi, w których siła oddziaływanie sprężyny jest proporcjonalna do jej ugięcia. Stąd możemy, wykorzystując nasze oznaczenia [3], [4] oraz [6], zapisać:

$$\{F\} = [K]\{z\}.$$

[8]

W układzie jak na rys. 1, płyta aby pozostawała w równowadze siły oddziaływujące muszą czynić zadość równaniom równowagi. Stąd zachodzi równość:

$$[X]\{F\} = Q\{x_c\},$$

[9]

gdzie moment sił obliczamy względem początku układu współrzędnych. Podstawiając [8] do [9] otrzymujemy:

$$[X][K]\{z\} = Q\{x_c\}.$$

[10]

Do tej pory nie wykorzystaliśmy najważniejszego założenia tej pracy o nieskończonej sztywności płyty. Założenie to sprowadza się do zdefiniowania położenia punktów mocowania sprężyn do płyty jako leżących na płaszczyźnie. Jeżeli określimy punkty te jako należne do płaszczyzny o równaniu:

$$Ax + By + C = z,$$

[11]

to definiując macierz współczynników równania płaszczyzny:

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix},$$

[12]

możemy uzyskać następujące równanie:

$$\{z\} = [X]^T \{A\}.$$

[13]

Podstawiając [13] do [10] uzyskujemy:

$$[X][K][X]^T \{A\} = Q\{x_c\}.$$

[14]

oznaczając:

$$[D] = [X][K][X]^T$$

[15]

uzyskujemy rozwiązanie ogólne problemu w postaci:

$$\{A\} = [D]^{-1} Q\{x_c\}.$$

[16]

Na koniec jeszcze dwa słowa o problemie sił zewnętrznych. Postawienie problemu z jedną siłą skupioną nie jest uproszczeniem problemu, gdyż zawsze da się przedstawić macierz uogólnionych sił zewnętrznych jako sumę występujących sił i w tym stanie rzeczy sprowadzić problem do przedstawionego wyżej.

Analiza problemu sztywnej płyty- wariant z podparciem jednopunktowym

Sytuacja, którą teraz rozważymy jest przypadkiem w którym jeden z punktów sztywnej płyty jest utwierdzony w podłożu. Odpowiada to sytuacji gdy jedna ze sprężyn ma nieskończona sztywność. Spróbujmy jednak podejść do problemu od strony geometrycznej. Fakt, że jeden z punktów płyty leży na płaszczyźnie utwierdzenia, sprowadza się do sytuacji gdy znamy położenie jednego punktu płaszczyzny reprezentującej pochyloną płytę w stanie równowagi. Przyjmując, układ współrzędnych tak aby jego początek wypadł w tym punkcie możemy uprościć równanie [11] do postaci:

$$Ax + By = z.$$

[17]

Wtedy odpowiednio równanie [5] przyjmie postać:

$$\{x_c'\} = \begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \end{Bmatrix}_{2 \times 1},$$

[18]

zaś równanie [7]:

$$[X'] = \begin{bmatrix} \{x\}^T \\ \{y\}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \\ \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \end{bmatrix}_{2 \times n}.$$

[19]

Oczywiście zgodnie z [17] definicja [12] będzie teraz wyglądała:

$$\{A'\} = \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}.$$

[20]

Dla tak zdefiniowanych macierzy ostateczne rozwiązanie jest tożsame z uzyskanym wcześniej. Pamiętając o [17], [18], [19], [20] uzyskujemy:

$$[D'] = [X'] [K] [X']^T$$

[21]

zaś rozwiązanie szczególne problemu w postaci:

$$\{A'\} = [D']^{-1} Q \{x_c'\}.$$

[22]

W wariancie tym pozostaje niewykorzystane do tej pory jedno równanie równowagi. Może posłużyć ono do wyznaczenia siły w punkcie podparcia:

$$R_o = Q - \sum_{i=1}^n F_i$$

[23]

Przykłady

Uzyskane wcześniej rozwiązania mogą znaleźć szerokie zastosowania w wielu problemach technicznych. Najbardziej jednak praktycznym zastosowaniem jest określenie ugięcia zawieszenia pojazdu pod wpływem dodatkowych sił pojawiających się w trakcie pracy. Przyjmijmy, że interesuje nas wpływ obciążenia zawieszonego na zbloczu gąsienicowego dźwigu (rys. 2).

Dla podanych danych, określmy stan równowagi pojazdu dla kilku charakterystycznych położenia obciążenia. W tabeli poniżej zebrano wszystkie testowane wartości macierzy położenia obciążenia:

	variant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\{x_c\}$	x_c	-1000	-1500	-2000	-2500	-3000	-5300	512	512	512	512	512
	y_c	1406	1406	1406	1406	1406	1406	-94	-594	-1094	-1594	-4400
	l	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabela 1

We wszystkich wariantach wykorzystamy to samo obciążenie $Q = 20000$ [kG].

Dla przedstawionych danych macierz $[D]$ przyjmuje wartości:

$$[D] = \begin{bmatrix} 2065024125 & 2413458315 & 679590 \\ 2413458315 & 4647263058 & 1138482 \\ 679590 & 1138482 & 324 \end{bmatrix}$$

Uwzględniając te wartości, jak również warianty położenia obciążenia (tabela 1) uzyskujemy następujące rezultaty zamieszczone w poniższej tabeli (dla przyjętych oznaczeń minus oznacza rozciąganie plus ściskanie sprężyny):

Położenie ciężaru												
Przypadki		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_c		-1000	-1500	-2000	-2500	-3000	-5300	512	512	512	512	512
y_c		1406	1406	1406	1406	1406	1406	-94	-594	-1094	-1594	-4400
Odległość od osi obrotu wysięgnika		1500	2000	2500	3000	3500	5800	1500	2000	2500	3000	5800
Numer koła		Wartość sił reakcji zawieszenia [kG]										
1	prawe	8794	9352	9911	10469	11027	13596	10287	11157	12027	12896	17779
2	prawe	7372	7944	8517	9090	9663	12297	7761	8273	8785	9296	12168
3	prawe	6019	6606	7192	7778	8365	11062	5360	5530	5701	5872	6832
4	prawe	4667	5267	5867	6467	7067	9826	2958	2788	2618	2448	1496
5	prawe	3272	3886	4499	5113	5727	8551	480	-42	-563	-1085	-4011
6	prawe	1923	2550	3178	3805	4433	7319	-1916	-2777	-3639	-4500	-9334
7	lewe	1445	817	189	-438	-1066	-3954	5310	6180	7050	7920	12802
8	lewe	23	-591	-1204	-1818	-2431	-5253	2785	3297	3808	4320	7191
9	lewe	-1329	-1929	-2529	-3129	-3729	-6489	383	554	725	896	1855
10	lewe	-2682	-3268	-3854	-4441	-5027	-7724	-2018	-2188	-2358	-2528	-3481
11	lewe	-4077	-4649	-5222	-5794	-6366	-8999	-4497	-5018	-5539	-6061	-8987
12	lewe	-5426	-5985	-6544	-7102	-7661	-10232	-6892	-7754	-8615	-9476	-14310
Suma sił reakcji		20000	20000	20000	20000	20000	20000	20000	20000	20000	20000	20000

Tabela 2

Rozważmy jeszcze wariant kiedy pojazd podeprze się w trakcie pracy żurawiem na lemieszu. Wtedy dla obciążenia jak w tabela 1 możemy przyjąć że punkt narożny lemieszka jest

punktem podparcia płaszczyzny płyty sztywnej o podłoże. Dla tego wariantu zastosowanie mają wzory [18] do [23]. Przy niezmiennych danych (w poprzednim przykładzie układ współrzędnych przyjęty był dla uproszczenia w narożu lemiesza). Wyniki również można przedstawić w tabeli:

Położenie ciężaru											
Przypadki	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_c	-1000	-1500	-2000	-2500	-3000	-5300	512	512	512	512	512
y_c	1406	1406	1406	1406	1406	1406	-94	-594	-1094	-1594	-4400
Odległość od osi obrotu wysięgnika	1500	2000	2500	3000	3500	5800	1500	2000	2500	3000	5800
Numer koła	Wartość sił reakcji zawieszenia [kG]										
1 prawe	251	259	266	274	281	316	-16	-100	-184	-268	-738
2 prawe	903	1059	1214	1370	1526	2241	-40	-250	-461	-671	-1853
3 prawe	1524	1820	2116	2413	2709	4073	-62	-393	-724	-1055	-2913
4 prawe	2144	2581	3018	3456	3893	5904	-85	-536	-988	-1439	-3973
5 prawe	2784	3367	3949	4532	5114	7793	-108	-684	-1260	-1836	-5067
6 prawe	3403	4126	4849	5572	6295	9620	-131	-827	-1523	-2219	-6125
7 lewe	-2898	-3806	-4714	-5622	-6530	-10706	72	457	842	1227	3388
8 lewe	-2246	-3006	-3766	-4526	-5285	-8781	49	307	565	823	2273
9 lewe	-1626	-2245	-2864	-3483	-4102	-6949	26	164	302	439	1213
10 lewe	-1005	-1484	-1962	-2440	-2918	-5118	3	21	38	55	153
11 lewe	-365	-698	-1031	-1364	-1697	-3229	-20	-127	-234	-341	-941
12 lewe	254	61	-131	-324	-516	-1402	-43	-270	-497	-724	-1999
Suma sił reakcji	3122	2034	946	-143	-1231	-6238	-354	-2239	-4123	-6008	-16584
Siła podparcia na lemieszu	16878	17966	19054	20143	21231	26238	20354	22239	24123	26008	36584

Tabela 3

Jeżeli uwzględnimy, że w stanie równowagi (dla obciążenia tylko ciężarem własnym) naciski pojazdu przyjmują wartości określone w poniższej tabeli, to możemy określić faktyczne siły w zawieszeniu pojazdu.

Naciski na koła- wg badań WZT4 bez gąsienic	
lewa	prawa
1704	3105
3826	4096
3315	3743
4009	4195
4501	4233
3476	4045
20831	23417

Przy uwzględnieniu powyższych danych wartość sił w zawieszeniu pojazdu w stanie równowagi kształtować się będzie następująco:

Przypadki		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Położenie ciężaru												
xc=	bok	-1000	-1500	-2000	-2500	-3000	-5300	0	0	0	0	0
yc=	przód	1406	1406	1406	1406	1406	1406	-94	-594	-1094	-1594	-4400
Odległość od osi obrotu wysięgnika		1500	2000	2500	3000	3500	5800	1500	2000	2500	3000	5800
Numer koła		WARIANT BEZ PODPARCIA NA LEMIESZU										
1	prawe	10 498	11 056	11 615	12 173	12 731	15 300	11 991	12 861	13 731	14 600	19 483
2	prawe	11 198	11 770	12 343	12 916	13 489	16 123	11 587	12 099	12 611	13 122	15 994
3	prawe	9 334	9 921	10 507	11 093	11 680	14 377	8 675	8 845	9 016	9 187	10 147
4	prawe	8 676	9 276	9 876	10 476	11 076	13 835	6 967	6 797	6 627	6 457	5 505
5	prawe	7 773	8 387	9 000	9 614	10 228	13 052	4 981	4 459	3 938	3 416	490
6	prawe	5 399	6 026	6 654	7 281	7 909	10 795	1 560	699	-163	-1 024	-5 858
1	lewe	4 550	3 922	3 294	2 667	2 039	-849	8 415	9 285	10 155	11 025	15 907
2	lewe	4 119	3 505	2 892	2 278	1 665	-1 157	6 881	7 393	7 904	8 416	11 287
3	lewe	2 414	1 814	1 214	614	14	-2 746	4 126	4 297	4 468	4 639	5 598
4	lewe	1 513	927	341	-246	-832	-3 529	2 177	2 007	1 837	1 667	714
5	lewe	156	-416	-989	-1 561	-2 133	-4 766	-264	-785	-1 306	-1 828	-4 754
6	lewe	-1 381	-1 940	-2 499	-3 057	-3 616	-6 187	-2 847	-3 709	-4 570	-5 431	-10 265
Suma sił na kołach		64248	64248	64248	64248	64248	64248	64248	64248	64248	64248	64248

A także dla wariantu z podparciem na lemieszu:

Przypadki		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Położenie ciężaru												
xc=	bok	-1000	-1500	-2000	-2500	-3000	-5300	0	0	0	0	0
yc=	przód	1406	1406	1406	1406	1406	1406	-94	-594	-1094	-1594	-4400
Odległość od osi obrotu wysięgnika		1500	2000	2500	3000	3500	5800	1500	2000	2500	3000	5800
Numer koła		WARIANT Z PODPARCIEM NA NAROŻU PRAWYM LEMIESZA										
1	prawe	1 955	1 963	1 970	1 978	1 985	2 020	1 688	1 604	1 520	1 436	966
2	prawe	4 729	4 885	5 040	5 196	5 352	6 067	3 786	3 576	3 365	3 155	1 973
3	prawe	4 839	5 135	5 431	5 728	6 024	7 388	3 253	2 922	2 591	2 260	402
4	prawe	6 153	6 590	7 027	7 465	7 902	9 913	3 924	3 473	3 021	2 570	36
5	prawe	7 285	7 868	8 450	9 033	9 615	12 294	4 393	3 817	3 241	2 665	-566
6	prawe	6 879	7 602	8 325	9 048	9 771	13 096	3 345	2 649	1 953	1 257	-2 649
1	lewe	207	-701	-1 609	-2 517	-3 425	-7 601	3 177	3 562	3 947	4 332	6 493
2	lewe	1 850	1 090	330	-430	-1 189	-4 685	4 145	4 403	4 661	4 919	6 369
3	lewe	2 117	1 498	879	260	-359	-3 206	3 769	3 907	4 045	4 182	4 956
4	lewe	3 190	2 711	2 233	1 755	1 277	-923	4 198	4 216	4 233	4 250	4 348
5	lewe	3 868	3 535	3 202	2 869	2 536	1 004	4 213	4 106	3 999	3 892	3 292
6	lewe	4 299	4 106	3 914	3 721	3 529	2 643	4 002	3 775	3 548	3 321	2 046
Suma sił na kołach		47370	46282	45194	44105	43017	38010	43894	42009	40125	38240	27664
Siła w podparciu		16878	17966	19054	20143	21231	26238	20354	22239	24123	26008	36584

Uwagi końcowe

Przedstawiona w opracowaniu metoda obliczania położenia płyty sztywnej podpartej w n punktach liniowo-sprężystości może znaleźć szerokie zastosowanie w wielu zagadnieniach praktycznych. Jak wykazały przedstawione przykłady mogliśmy, dzięki zwięzłej matematycznej formie wyprowadzonych równań szybko określić stan równowagi układu. Zarazem przykłady wykazały, że zastosowanie równania znajdą przede wszystkim w

obliczaniu stanu obciążenia zawieszonych pojazdów. Pozwalając na szybką weryfikację dowolnego stanu obciążenia.